Théorème de Weierstrass par la convolution

Référence Gourdon, Analyse p.284.

Théorème : Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de polynomes.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$. On prend $(\chi_n)_n$ une approximation de l'unité.

Étape 1 : Montrons que $\|\chi_n * f - f\|_\infty \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$

Comme $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$, alors par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur son support, et comme elle vaut 0 partout ailleurs alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, de sorte que :

$$\exists \eta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\displaystyle\int_{|t|\geq\eta} \chi_n(t)\,\mathrm{dt} \leq \varepsilon$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Big|f * \chi_n(x) - f(x)\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\chi_n(t)\,\mathrm{dt} - f(x)\Big| \\
&= \Big|\int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))\chi_n(t)\,\mathrm{dt}\Big| \text{ car } \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)\,dt = 1 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|\chi_n(t)\,\mathrm{dt} \text{ car } \chi_n \geq 0 \\
&\leq \int_{|t|\geq\eta} |f(x-t) - f(x)|\chi_n(t)\,\mathrm{dt} + \int_{|t|<\eta} |f(x-t) - f(x)|\chi_n(t)\,\mathrm{dt} \\
&\leq 2\|f\|_\infty \int_{|t|\geq\eta} \chi_n(t)\,\mathrm{dt} + \varepsilon \int_{|t|<\eta} \chi_n(t)\,\mathrm{dt} \\
&\leq 2\varepsilon\|f\|_\infty + \varepsilon = (2\|f\|_\infty + 1)\varepsilon
\end{aligned}$$

En passant au $\sup_{x\in\mathbb{R}}$, $\|\chi_n * f - f\|_\infty \leq (2\|f\|_\infty + 1)\varepsilon \to 0$

Étape 2 : On définit une approximation de l'unité.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n\,\mathrm{dt}$. On pose :

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \to \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{a_n} & \text{si } |\mathrm{t}| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$(p_n)_n$ est une approximation de l'unité. On va montrer que $f * p_n$ est un polynôme. On pose I=supp$(f) = [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$\forall x \in I$, on a $(f * p_n)(x) = (p_n * f)(x) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} p_n(x-t)f(t)\,\mathrm{dt}$

Si x et t sont dans I, alors $|x-t| \leq 1$. Ainsi, $p_n(x-t) = \frac{1}{a_n}(1-(x-t)^2)^n$. En développant, on obtient :

$$p_n(x-t) = \sum_{k=0}^{2n} q_k(t)x^k \text{ oú } t \mapsto q_k(t) \text{ est un polynôme}$$

On a alors : $(f * p_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \Big(\int_{-1/2}^{1/2} q_k(t)f(t) \Big) x^k$. Donc c'est un polynôme. Enfin, d'après ce que l'on a montré précédemment, on sait que $f * p_n$ converge uniformément vers f. f est alors limite uniforme d'une suite de polynômes.

<u>Étape 3 : Concluons</u>

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $[c,d]$ un segment tel que $[a,b] \subset [c,d]$. On prolonge f sur $[c,a]$ par une fonction affine qui vaut 0 en c et $f(a)$ en a (de même sur $[b,d]$), et on prolonge sur $\mathbb{R}$ tout entier par 0. Ce prolongement est dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$. Par un changement de variable affine, on peut se ramener à l'intervalle $[c,d] = [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. On est dans le cas de l'étape 2, f est limite uniforme d'une suite de polynôme sur [c,d] donc sur [a,b]. $\square$

Recasage : 209, 201, 202, 228, 203